Uneigentliche Integrale

Problem wenn B oder f(x) nicht beschränkt sind → $\int_B f(x)\, d\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \int_{B^{(n)}} f(x)\, d\mu(x)$

Bsp: $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{t^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\Big|_1^b & (\alpha\neq 1) \\ \ln t\Big|_1^b & (\alpha=1) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1) \\ \lim_{b\to\infty} \ln b & (\alpha\leq 1) \to \nexists \end{matrix} \right\}$

Sei f:(a,∞) → IR stetig (i) Gibt es C>0 und b>1, so dass $|f(t)| \leq \frac{C}{t^b}$ $\Rightarrow \exists \int_a^\infty f(t)\,dt,\quad a>0$

(ii) Gibt es C>0 und $t_0 \geq b$, so dass $f(t) \geq \frac{C}{t}$ $\forall t \geq t_0$ ⇒ Integral divergiert

Sei f:(0,a) → IR stetig (i) Gibt es C>0 und b<1, so dass $|f(t)| \leq \frac{C}{t^b}$ $\Rightarrow \exists \int_0^a f(t)\,dt,\quad a>0$

(ii) Gibt es C>0, so dass $f(t) \geq \frac{C}{t}$ ⇒ Integral divergiert

Laplace Transformation

Ist F(t) eine Funktion auf (0,∞) so ist $\pounds\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$ die <u>Laplace Transformierte</u>

F(t)=1 F(t)=t	f(s)=1/s f(s)=1/s^2
F(t)=e^{at}	$f(s) = \frac{1}{s-a}$
F(t)=sin(at)	$f(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
F(t)=sinh(at)	$f(s) = \frac{a}{s^2-a^2}$

F(t)=t^n	$f(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

F(t)=cos(at)	$f(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$
F(t)=cosh(at)	$f(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$

Bsp: F(t)=1 $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(-s)}\, e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(-s)} (e^{-sb} - e^0) = \frac{1}{s}$

Eigenschaften der Laplace Transformation

1. Linearität: $\pounds\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \pounds\{F_1(t)\} + c_2 \pounds\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$
2. Translation: $\pounds\{e^{at} F(t)\} = f^{(s-a)}$
3. Translation II: $G(t) = \left\{ \begin{matrix} F(t-a) & (t>a) \\ 0 & (t<a) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pounds\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$
4. Skalierung: $\pounds\{F(at)\} = 1/a\, f(s/a)$
5. Ableitungsregeln: (a) F(t) (stückweise) stetig auf 0≤t≤N $\Rightarrow \pounds\{F'(t)\} = s\, f(s) - F(0)$
   (b) F(t) unstetig bei t=0, $\lim_{t\to 0^+} F(t) = F(0^+)$ $\Rightarrow \pounds\{F'(t)\} = s\, f(s) - F(0^+)$
   (c) F(t) unstetig bei t=a $\Rightarrow \pounds\{F'(t)\} = s\, f(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a^+) - F(a^-)\}$
   (d) n-te Ableitung: $\Rightarrow s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0)$
6. Integration: $\pounds\{\int_0^t F(z)\,du\} = \frac{f(s)}{s}$

7. Multiplikation mit t^n: $\pounds\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

8. Division durch t: $\pounds\{F(t)/t\} = \int_s^\infty f(u)\,du$ (falls $\exists \lim_{t\to 0} F(t)/t$)

9. Periodische Funkt.: $F(t) = F(t+T),\quad T>0 \quad \Rightarrow \quad \pounds\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$